

单比特大规模 MIMO 系统的非相干分布源角度参数估计方法

刘亚鹏, 高洪元, 张志伟, 马静雅

(哈尔滨工程大学信息与通信工程学院, 黑龙江 哈尔滨 150001)

摘要: 针对大规模 MIMO 系统存在的高成本、高功耗问题以及在多径密集场景中基于点目标模型的波达方向估计方法性能恶化的难题, 提出一种单比特大规模 MIMO 系统的非相干分布源角度参数估计方法。首先, 利用反正弦定律恢复归一化无量化协方差矩阵; 其次, 构建核范数最小化目标函数以恢复低秩的空间谱矩阵, 从而实现二维 DOA 的准确估计; 然后, 通过一阶泰勒展开重构无噪信号协方差矩阵, 实现对角度扩展的精确估计; 最后, 还推导了单比特 ID 源角度参数估计的克拉美罗界, 为性能分析提供理论依据。仿真结果表明, 在信噪比为 10 dB、快拍数为 100、阵元数为 36 的条件下, 该方法的 DOA 和角度扩展估计精度分别达到 0.91° 和 1.12° 。与已有单比特方法相比, 该方法有明显的性能优势, 同时计算时间适中, 在估计精度和计算效率之间取得了良好的平衡, 有利于进一步推动在单比特大规模 MIMO 系统中的工程应用进程。

关键词: 单比特大规模 MIMO; 非相干分布源; 核范数最小化; 角度参数估计; 克拉美罗界

中图分类号: TN911.7

文献标志码: A

DOI: 10.11959/j.issn.1000-436x.2025007

Angular parameter estimation method for incoherently distributed sources in one-bit massive MIMO system

LIU Yapeng, GAO Hongyuan, ZHANG Zhiwei, MA Jingya

College of Information and Communication Engineering, Harbin Engineering University, Harbin 150001, China

Abstract: To address the challenges of high cost and power consumption in massive MIMO systems and the performance degradation of point-source-based direction of arrival estimation methods in densely multipath scenarios, an angular parameter estimation method for incoherently distributed sources in one-bit massive MIMO system was proposed. Firstly, the normalized unquantized covariance matrix was recovered using the arcsine law. Secondly, a nuclear norm minimization objective function was constructed to recovery the low-rank spatial spectrum matrix, thereby achieving accurate estimation of two-dimensional direction of arrival. Subsequently, the noise-free signal covariance matrix was reconstructed using the first-order Taylor expansion to achieve accurate angular spread estimation. Finally, the Cramér-Rao bound for one-bit incoherently distributed source angle parameter estimation was derived, providing a theoretical basis for performance analysis. Simulation results demonstrate that under conditions of a 10 dB signal-to-noise ratio, 100 snapshots, and 36 array elements, the proposed method achieves direction of arrival and angular spread estimation accuracies of 0.91° and 1.12° respectively, which represents a significant performance improvement over existing one-bit methods. Furthermore, the computational time is moderate, achieving a commendable balance between estimation accuracy and computational efficiency, thereby enhancing its potential for practical implementation in one-bit massive MIMO systems.

Keywords: one-bit massive MIMO, incoherently distributed source, nuclear norm minimization, angular parameter estimation, Cramér-Rao bound

收稿日期: 2024-05-10; 修回日期: 2024-11-11

通信作者: 高洪元, gaohongyuan@hrbeu.edu.cn

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(No.62372131); 黑龙江省自然科学基金资助项目(No.LH2020F017)

Foundation Items: The National Natural Science Foundation of China (No.62372131), The Natural Science Foundation of Heilongjiang Province (No.LH2020F017)

0 引言

在大规模天线阵列系统中,通常采用多比特模数转换器(ADC, analog-to-digital converter)对接收信号进行采样和量化。然而,随着量化位数的增加,ADC的硬件成本和功耗呈指数级增长^[1]。此外,对于大规模多输入多输出(MIMO, multiple-input multiple output)系统,采用多比特量化会导致每根天线产生庞大的数据量,从而加重数据传输和存储的负担。相比之下,低比特量化因其低成本、低功耗及低数据量的显著优势,在大规模MIMO系统中展现出巨大的应用潜力。其中,低比特量化的一个极端情况是单比特(OB, one-bit)量化,它仅保留随机测量的符号信息。与多比特ADC相比,单比特ADC仅使用一个简单的比较器,从而能够显著降低系统的成本和功耗^[2]。

波达方向(DOA, direction of arrival)估计作为阵列信号处理领域的重要研究方向,在雷达、声呐和无线通信中有着广泛的应用^[3-5]。对于大规模MIMO系统,文献[6]提出一种基于高阶传播算子方法的大规模MIMO系统DOA估计方法。文献[7]提出一种混合大规模MIMO系统的空间协方差矩阵重建的波束扫描方法。文献[8]提出一种基于深度学习的大规模均匀圆阵DOA估计方法。文献[9]提出一种极化大规模MIMO系统下的DOA和极化估计的压缩采样框架。上述方法大多基于点目标模型,对于分布源模型,文献[10]提出一种针对大规模MIMO系统的相干分布(CD, coherently distributed)源非圆DOA估计方法。文献[11]提出一种考虑幅相误差的大规模MIMO系统CD源DOA估计方法,文献[12]和文献[13]分别在大规模MIMO系统下提出基于阵元空间和波束空间的非相干分布(ID, incoherently distributed)源DOA估计方法。

上述方法均基于多比特量化方式设计。近年来,单比特量化因其低成本和低复杂度的优势在DOA估计领域受到广泛关注。文献[14]首先从单比特量化信号中恢复无量化接收信号,并利用多重信号分类(MUSIC, multiple signal classification)算法进行DOA估计。文献[15]提出一种基于无量化数据协方差矩阵重构的单比特DOA估计方法。文献[16]直接将MUSIC算法应用于单比特数据的协方差矩阵进行DOA估计,在低信噪比条件下表现出与文献[14]所提算法相近的估计性能。基于压缩

感知理论,文献[17]提出一种稀疏贝叶斯学习算法,以进行单比特DOA估计。文献[18]提出一种基于原子范数最小化的单比特DOA估计方法。文献[19]提出一种基于加速近端梯度算法的无网格单比特DOA估计方法。文献[20]提出一种离网格迭代重加权单比特DOA估计方法。文献[21]提出一种基于 $l_{2,1}$ 范数最小化的确定性信号单比特DOA估计方法。此外,文献[22]推导了单源场景下单比特DOA估计的克拉美罗界(CRB, Cramér-Rao bound)。文献[23]推导了确定性信号的单比特DOA估计的CRB。

上述单比特DOA估计方法均假设目标为点目标,但在实际的复杂通信场景中,由于多径效应的影响,目标通常会呈现一定的空间分布特性。在这种情况下,采用参数化的分布源模型进行处理更为恰当。根据信道的观测周期和相干时间的关系,分布源模型可以分为CD源和ID源,分别适用于慢时变信道和快时变信道^[24]。近年来,针对CD源的角度参数估计问题,研究人员提出一系列方法^[25-28],这些方法大多是基于点目标模型DOA估计方法的直接推广。然而,在快时变信道下,ID源的特性使其角度参数估计问题变得尤为复杂。由于信号分量遍布整个观测空间,传统基于点目标模型的DOA估计方法难以直接应用于ID源,使得ID源的角度参数估计成为DOA估计领域的研究热点。文献[29]提出一种分布源参数估计方法,该方法需要确定伪信号子空间的有效维数。文献[30]提出一种基于子空间理论(ST, subspace theory)的ID源角度参数估计方法,该方法无须对协方差矩阵进行特征分解,因此不需要确定伪信号子空间的有效维数。文献[31]提出基于协方差匹配的ID源角度参数估计方法,该方法需要利用方位角的粗估计结果进行初始化。然而,由于这些算法均需要多维谱峰搜索,严重限制了其工程应用。文献[12]基于旋转不变子空间技术(ESPRIT, estimation of signal parameters via rotational invariance technique)提出一种ID源二维角度参数估计方法,虽然该方法的计算复杂度低,但估计精度较差。基于流形分离技术,文献[32-33]提出了任意阵列结构下的ID源角度参数估计方法。此外,文献[34]基于空时稀疏采样和低秩矩阵重构理论提出一种宽带ID源联合角度频率估计方法。文献[35-36]考虑幅相误差提出一种ID源角度参数估计方法。文献[37]提出一种混合圆

和非圆 ID 源的角度参数估计方法。

上述方法均基于多比特量化方式设计。然而,在实际应用中,这种高精度接收方式通常伴随着较高的硬件成本和功耗,这在很大程度上限制了其在大规模场景中的应用。相比之下,单比特 ADC 凭借其低成本和低功耗的优势,在大规模 MIMO 系统中展现出巨大的应用潜力。然而,在单比特量化场景下,这些传统方法的性能会受到严重影响,甚至可能完全失效。目前,关于单比特量化下 ID 源角度参数估计的理论研究尚显不足,相关方法和技术亟须进一步发展和完善。因此,研究单比特量化下 ID 源角度参数估计方法,不仅能够满足实际应用中的性能需求,还能有效降低成本和复杂度,为相关领域的发展提供新的可能性和研究方向。本文的主要研究工作如下。

1) 根据反正弦定律,重构归一化无量化协方差矩阵,并建立核范数最小化 (NNM, nuclear norm minimization) 优化问题以恢复低秩空间谱矩阵,从而实现 ID 源的二维 DOA 估计。本文给定二维 DOA 估计值,利用一阶泰勒近似方法重构无噪声信号协方差矩阵,进而估计 ID 源的二维角度扩展。

2) 根据单比特量化协方差矩阵和归一化无量化协方差矩阵相应元素间的映射关系,推导单比特量化下 ID 源角度参数估计的 CRB,以此作为评估 ID 源角度参数估计算法性能的重要指标。

3) 仿真结果表明,在单比特量化条件下与已有算法相比,本文方法在估计性能和计算时间上取得了良好的平衡。该方法为单比特量化下的 ID 源角度参数估计提供了新的解决方案,并为相关领域的研究和应用提供了有价值的参考。

1 单比特量化信号模型

假设有 K 个波长为 λ 的 ID 源入射到由 $M = M_x M_y$ 个阵元组成的均匀矩阵上, M_x 和 M_y 分别为 x 轴方向和 y 轴方向的阵元数,相邻阵元的间距为 d 。阵列接收信号可以表示为

$$\mathbf{z}(t) = \sum_{k=1}^K s_k(t) \sum_{l=1}^{L_k} \gamma_{k,l}(t) \mathbf{a}(\theta_{k,l}(t), \varphi_{k,l}(t)) + \mathbf{n}(t) \quad (1)$$

其中, $s_k(t)$ 为第 k 个 ID 源入射信号, $\gamma_{k,l}(t) \sim \text{CN}\left(0, \frac{\sigma_{\gamma_k}^2}{L_k}\right)$ 为第 k 个 ID 源第 l 条路径的复高斯增益因子, $\text{CN}(\cdot)$ 表示复高斯分布, L_k 和 $\sigma_{\gamma_k}^2$ 分别为第 k 个

ID 源的多径数和路径增益方差, $\mathbf{n}(t)$ 为加性白高斯噪声, $\mathbf{a}(\theta_{k,l}(t), \varphi_{k,l}(t))$ 为阵列导向矢量,其第 m 个元素可以表示为

$$\left[\mathbf{a}(\theta_{k,l}(t), \varphi_{k,l}(t)) \right]_m = \exp\left(ju \sin(\varphi_{k,l}(t)) \cdot \left[(m_x - 1) \cos(\theta_{k,l}(t)) + (m_y - 1) \sin(\theta_{k,l}(t)) \right]\right) \quad (2)$$

其中, $m = (m_y - 1)M_x + m_x$, $m_x = 1, 2, \dots, M_x$, $m_y = 1, 2, \dots, M_y$, $u = \frac{2\pi d}{\lambda}$, $\theta_{k,l}(t)$ 和 $\varphi_{k,l}(t)$ 分别为第 k 个 ID 源第 l 条路径的方位角和俯仰角,可以表示为

$$\theta_{k,l}(t) = \bar{\theta}_k + \tilde{\theta}_{k,l}(t) \quad (3)$$

$$\varphi_{k,l}(t) = \bar{\varphi}_k + \tilde{\varphi}_{k,l}(t) \quad (4)$$

其中, $\bar{\theta}_k$ 和 $\bar{\varphi}_k$ 分别为第 k 个 ID 源的方位向和俯仰向 DOA, $\tilde{\theta}_{k,l}(t) \sim \mathcal{N}(0, \sigma_{\theta_k}^2)$ 和 $\tilde{\varphi}_{k,l}(t) \sim \mathcal{N}(0, \sigma_{\varphi_k}^2)$ 分别为第 k 个 ID 源第 l 条路径的方位向和俯仰向的角度偏差, $\mathcal{N}(\cdot)$ 表示高斯分布, σ_{θ_k} 和 σ_{φ_k} 分别为第 k 个 ID 源的方位向和俯仰向的角度扩展。

假设每个阵元均连接一个单比特 ADC, 则第 m 个阵元的单比特量化信号可以表示为

$$\left[\bar{z}(t) \right]_m = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{sgn}\left(\Re\left\{\left[\mathbf{z}(t)\right]_m\right\}\right) + \frac{j}{\sqrt{2}} \text{sgn}\left(\Im\left\{\left[\mathbf{z}(t)\right]_m\right\}\right) \quad (5)$$

其中, $\Re(\cdot)$ 和 $\Im(\cdot)$ 分别表示取实部和取虚部运算, $\text{sgn}(\cdot)$ 为符号函数, 可以表示为

$$\text{sgn}(z) = \begin{cases} 1, & z \geq 0 \\ -1, & z < 0 \end{cases} \quad (6)$$

2 ID 源角度参数估计

2.1 归一化无量化协方差矩阵重构

无量化协方差矩阵表示为

$$\mathbf{R}_z = \text{E}\left[\mathbf{z}(t)\mathbf{z}^H(t)\right] = \mathbf{R}_s + \sigma_n^2 \mathbf{I}_M \quad (7)$$

其中, σ_n^2 为噪声功率, \mathbf{I}_M 为单位矩阵, \mathbf{R}_s 为信号协方差矩阵, 可以表示为

$$\mathbf{R}_s = \sum_{k=1}^K \sigma_k^2 \iint_{\Phi_{\theta\varphi}} \rho_k(\theta, \varphi, \boldsymbol{\psi}_k) \mathbf{a}(\theta, \varphi) \mathbf{a}^H(\theta, \varphi) d\theta d\varphi = \iint_{\Phi_{\theta\varphi}} c(\theta, \varphi) \mathbf{A}_{\theta, \varphi} d\theta d\varphi \quad (8)$$

其中, $\sigma_k^2 = \sigma_{\gamma_k}^2 \mathbb{E} \left[|s_k(t)|^2 \right]$ 为信号功率, Φ 和 Θ 分别为方位角和俯仰角的角度范围, $\rho_k(\theta, \varphi, \boldsymbol{\psi}_k)$ 和 $\boldsymbol{\psi}_k = [\bar{\theta}_k, \bar{\varphi}_k, \sigma_{\theta_k}, \sigma_{\varphi_k}]$ 分别为角功率密度函数和角度参数矢量, $\mathbf{A}_{\theta, \varphi} = \mathbf{a}(\theta, \varphi) \mathbf{a}^H(\theta, \varphi)$, $c(\theta, \varphi) = \sum_{k=1}^K \sigma_k^2 \rho_k(\theta, \varphi, \boldsymbol{\psi}_k)$ 。

根据反正弦定律^[38], 单比特量化协方差矩阵 \mathbf{R}_z 和无量化协方差矩阵 \mathbf{R}_z 存在以下关系

$$\mathbf{R}_z = \mathbb{E} [\bar{\mathbf{z}}(t) \bar{\mathbf{z}}^H(t)] = \frac{2}{\pi} \arcsine(\bar{\mathbf{R}}_z) \quad (9)$$

其中, $\arcsine(\bar{\mathbf{R}}_z) = \arcsin(\Re(\bar{\mathbf{R}}_z)) + j \arcsin(\Im(\bar{\mathbf{R}}_z))$, $\bar{\mathbf{R}}_z$ 为归一化无量化协方差矩阵, 可以表示为

$$\bar{\mathbf{R}}_z = \frac{\mathbf{R}_z}{\sigma_n^2 + \sum_{k=1}^K \sigma_k^2} = \iint_{\Phi \Theta} \bar{c}(\theta, \varphi) \mathbf{A}_{\theta, \varphi} d\theta d\varphi + \left(1 - \sum_{k=1}^K \bar{\sigma}_k^2 \right) \mathbf{I}_M \quad (10)$$

其中, $\bar{c}(\theta, \varphi) = \sum_{k=1}^K \bar{\sigma}_k^2 \rho_k(\theta, \varphi, \boldsymbol{\psi}_k)$, $\bar{\sigma}_k^2 = \frac{\sigma_k^2}{\sigma_n^2 + \sum_{k=1}^K \sigma_k^2}$

为归一化信号功率。

2.2 DOA 估计

将归一化无量化协方差矩阵进行向量化操作, 得到

$$\mathbf{r} = \text{vec}(\bar{\mathbf{R}}_z) = \iint_{\Phi \Theta} \bar{c}(\theta, \varphi) \tilde{\mathbf{a}}_{\theta, \varphi} d\theta d\varphi + \tilde{\mathbf{n}} \quad (11)$$

其中, $\tilde{\mathbf{a}}_{\theta, \varphi} = \text{vec}(\mathbf{A}_{\theta, \varphi})$, $\tilde{\mathbf{n}} = \text{vec} \left(\left(1 - \sum_{k=1}^K \bar{\sigma}_k^2 \right) \mathbf{I}_M \right)$ 。

将式(11)的积分进行离散化, \mathbf{r} 可以近似为

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &\approx \sum_{n=1}^N \sum_{\bar{n}=1}^N \bar{c}_{\theta_n, \varphi_{\bar{n}}} \tilde{\mathbf{a}}_{\theta_n, \varphi_{\bar{n}}} \Delta_{\theta} \Delta_{\varphi} + \tilde{\mathbf{n}} = \\ &\tilde{\mathbf{A}}_{\theta, \varphi} \bar{\mathbf{c}}_{\theta, \varphi} + \tilde{\mathbf{n}} = \\ &\tilde{\mathbf{A}}_{\theta, \varphi} \text{vec}(\mathbf{C}_{\theta, \varphi}) + \tilde{\mathbf{n}} \end{aligned} \quad (12)$$

其中, $\bar{c}_{\theta_n, \varphi_{\bar{n}}} = \bar{c}(\theta_n, \varphi_{\bar{n}})$, N 为方位向和俯仰向的网格数, Δ_{θ} 和 Δ_{φ} 分别为方位向和俯仰向的网格间距, 表示为

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}}_{\theta, \varphi} &= [\underbrace{\tilde{\mathbf{a}}_{\theta_1, \varphi_1}, \dots, \tilde{\mathbf{a}}_{\theta_1, \varphi_N}}_N, \underbrace{\tilde{\mathbf{a}}_{\theta_2, \varphi_1}, \dots, \tilde{\mathbf{a}}_{\theta_2, \varphi_N}}_N, \dots, \\ &\underbrace{\tilde{\mathbf{a}}_{\theta_N, \varphi_1}, \dots, \tilde{\mathbf{a}}_{\theta_N, \varphi_N}}_N] \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{c}}_{\theta, \varphi} &= \text{vec}(\mathbf{C}_{\theta, \varphi}) = \\ &\Delta_{\theta} \Delta_{\varphi} [\underbrace{\bar{c}_{\theta_1, \varphi_1}, \dots, \bar{c}_{\theta_1, \varphi_N}}_N, \underbrace{\bar{c}_{\theta_2, \varphi_1}, \dots, \bar{c}_{\theta_2, \varphi_N}}_N, \dots, \\ &\underbrace{\bar{c}_{\theta_N, \varphi_1}, \dots, \bar{c}_{\theta_N, \varphi_N}}_N]^T \end{aligned} \quad (14)$$

其中, $\mathbf{C}_{\theta, \varphi}$ 为空间谱矩阵, 具有低秩结构, 其秩不超过 ID 源的数量 K , 即 $\text{rank}(\mathbf{C}_{\theta, \varphi}) \leq K$ ^[34]。因此, 利用 $\mathbf{C}_{\theta, \varphi}$ 的低秩性得到其估计结果 $\hat{\mathbf{C}}_{\theta, \varphi}$ 为

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{C}}_{\theta, \varphi} &= \arg \min_V \text{rank}(V) \\ \text{s.t. } \tilde{\mathbf{A}}_{\theta, \varphi} \text{vec}(V) &= \mathbf{r} - \tilde{\mathbf{n}} \end{aligned} \quad (15)$$

在实际应用场景下, 单比特量化协方差矩阵由 Q 个快拍单比特量化信号估计得到, 即

$$\hat{\mathbf{R}}_z = \sum_{q=1}^Q \bar{\mathbf{z}}(q) \bar{\mathbf{z}}^H(q) \quad (16)$$

式(15)可以转换为

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{C}}_{\theta, \varphi} &= \arg \min_V \text{rank}(V) \\ \text{s.t. } \left\| \tilde{\mathbf{A}}_{\theta, \varphi} \text{vec}(V) - \hat{\mathbf{r}} \right\|_2 &\leq \eta^2 \end{aligned} \quad (17)$$

其中, η 为拟合误差, $\hat{\mathbf{r}} = \text{vec}(\hat{\mathbf{R}} - \hat{\sigma}_n^2 \mathbf{I}_M)$, $\hat{\mathbf{R}} = \sin\left(\frac{\pi}{2} \Re(\hat{\mathbf{R}}_z)\right) + j \sin\left(\frac{\pi}{2} \Im(\hat{\mathbf{R}}_z)\right)$, $\hat{\sigma}_n^2$ 为噪声功率估计值, 其由 $\hat{\mathbf{R}}$ 后 $M - 3K$ 个较小特征值的均值估计得到^[12]。

考虑 $\tilde{\mathbf{A}}_{\theta, \varphi}$ 的维数为 $M^2 \times N^2$, 在对式(17)进行优化时, 会造成较大的计算复杂度, 使用主成分分析^[39]对其进行降维预处理, 对 $\tilde{\mathbf{A}}_{\theta, \varphi}$ 进行奇异值分解, 得到

$$\tilde{\mathbf{A}}_{\theta, \varphi} = \mathbf{U}_A \mathbf{A}_A \mathbf{V}_A^H \quad (18)$$

其中, \mathbf{U}_A 和 \mathbf{V}_A 分别为 $\tilde{\mathbf{A}}_{\theta, \varphi}$ 的左奇异矢量和右奇异矢量, \mathbf{A}_A 为 $M^2 \times N^2$ 矩阵, 除了主对角线上的元素以外全为 0, 主对角线上的元素为 $\tilde{\mathbf{A}}_{\theta, \varphi}$ 的奇异值。

定义 $\tilde{\mathbf{A}}_{\theta, \varphi}$ 所有奇异值的和为 E_s , 定义截断后奇异值的和为 \hat{E}_s , 根据 $\frac{\hat{E}_s}{E_s} \geq 0.99$ 保留前 99% 较大的奇异值, 实现在保留关键特征的同时减少优化时的计算量, 从而提高计算效率。因此, $\bar{\mathbf{A}}_{\theta, \varphi}$ 表示为

$$\bar{\mathbf{A}}_{\theta, \varphi} = \bar{\mathbf{U}}_A \bar{\mathbf{A}}_A \bar{\mathbf{V}}_A^H \quad (19)$$

其中, $\bar{\mathbf{A}}_{\theta, \varphi}$ 表示截断后的 $\tilde{\mathbf{A}}_{\theta, \varphi}$, $\bar{\mathbf{U}}_A$, $\bar{\mathbf{A}}_A$ 和 $\bar{\mathbf{V}}_A$ 分别为截断后的 \mathbf{U}_A , \mathbf{A}_A 和 \mathbf{V}_A 。

进一步地, 得到降维后的 $\tilde{\mathbf{A}}_{\theta,\varphi}$ 和 $\hat{\mathbf{r}}$ 分别为

$$\tilde{\mathbf{A}}_{\theta,\varphi}^d = \bar{\mathbf{U}}_A^H \bar{\mathbf{A}}_{\theta,\varphi} = \bar{\mathbf{A}}_A \bar{\mathbf{V}}_A^H \quad (20)$$

$$\hat{\mathbf{r}}_d = \bar{\mathbf{U}}_A^H \hat{\mathbf{r}} \quad (21)$$

式(17)的秩最小化问题是一个非凸优化问题, 难以直接求解。因此, 通过对其进行凸松弛, 将其转化为NNM问题, 表示为

$$\hat{\mathbf{C}}_{\theta,\varphi} = \arg \min_V \left\{ \|V\|_* + \mu \left\| \tilde{\mathbf{A}}_{\theta,\varphi}^d \text{vec}(V) - \hat{\mathbf{r}}_d \right\|_2^2 \right\} \quad (22)$$

其中, $\|\cdot\|_*$ 表示核范数, μ 是正则化参数。式(22)可以直接通过 CVX 工具箱进行求解。

给定 $\hat{\mathbf{C}}_{\theta,\varphi}$, 方位角和俯仰向 DOA 可以由式(23)和式(24)得到^[22]

$$\hat{\theta}_k = \frac{\sum_j \sum_i \theta_i \hat{\mathbf{C}}_{\theta,\varphi}(\theta_i, \varphi_j)}{\sum_j \sum_i \hat{\mathbf{C}}_{\theta,\varphi}(\theta_i, \varphi_j)}, \theta_i \in \Phi_k, \varphi_j \in \Theta_k \quad (23)$$

$$\hat{\varphi}_k = \frac{\sum_j \sum_i \varphi_j \hat{\mathbf{C}}_{\theta,\varphi}(\theta_i, \varphi_j)}{\sum_j \sum_i \hat{\mathbf{C}}_{\theta,\varphi}(\theta_i, \varphi_j)}, \theta_i \in \Phi_k, \varphi_j \in \Theta_k \quad (24)$$

其中, $\Phi_k = [\hat{\theta}_k - 3\Delta_\theta, \hat{\theta}_k + 3\Delta_\theta]$ 和 $\Theta_k = [\hat{\varphi}_k - 3\Delta_\varphi, \hat{\varphi}_k + 3\Delta_\varphi]$ 分别表示第 k 个 ID 源方位角和俯仰角的角度范围, $\left\{ (\hat{\theta}_k, \hat{\varphi}_k) \right\}_{k=1}^K$ 可以通过搜索 $\hat{\mathbf{C}}_{\theta,\varphi}$ 的 K 个最大峰值得到。

2.3 角度扩展估计

在小角度扩展下, 对阵列导向矢量 $\mathbf{a}(\theta_{k,l}(t), \varphi_{k,l}(t))$ 进行一阶泰勒展开, 得到

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(\theta_{k,l}(t), \varphi_{k,l}(t)) &= \mathbf{a}(\bar{\theta}_k + \tilde{\theta}_{k,l}(t), \bar{\varphi}_k + \tilde{\varphi}_{k,l}(t)) \approx \\ &\mathbf{a}(\bar{\theta}_k, \bar{\varphi}_k) + \frac{\partial \mathbf{a}(\bar{\theta}_k, \bar{\varphi}_k)}{\partial \bar{\theta}_k} \tilde{\theta}_{k,l}(t) + \frac{\partial \mathbf{a}(\bar{\theta}_k, \bar{\varphi}_k)}{\partial \bar{\varphi}_k} \tilde{\varphi}_{k,l}(t) \end{aligned} \quad (25)$$

因此, 式(1)可以近似为

$$\begin{aligned} \mathbf{z}(t) &\approx \sum_{k=1}^K \left(\mathbf{a}(\bar{\theta}_k, \bar{\varphi}_k) b_{k,1}(t) + \frac{\partial \mathbf{a}(\bar{\theta}_k, \bar{\varphi}_k)}{\partial \bar{\theta}_k} b_{k,2}(t) + \right. \\ &\left. \frac{\partial \mathbf{a}(\bar{\theta}_k, \bar{\varphi}_k)}{\partial \bar{\varphi}_k} b_{k,3}(t) \right) + \mathbf{n}(t) \end{aligned} \quad (26)$$

其中, $b_{k,1}(t)$ 、 $b_{k,2}(t)$ 和 $b_{k,3}(t)$ 分别为

$$b_{k,1}(t) = s_k(t) \sum_{l=1}^{L_k} \gamma_{k,l}(t) \quad (27)$$

$$b_{k,2}(t) = s_k(t) \sum_{l=1}^{L_k} \gamma_{k,l}(t) \tilde{\theta}_{k,l}(t) \quad (28)$$

$$b_{k,3}(t) = s_k(t) \sum_{l=1}^{L_k} \gamma_{k,l}(t) \tilde{\varphi}_{k,l}(t) \quad (29)$$

式(27)~式(29)的方差可以表示为

$$\mathbb{E}[b_{k,1}(t)b_{k,1}^*(t)] = \sigma_k^2 \mathbb{E}[|s_k(t)|^2] = \sigma_k^2 \quad (30)$$

$$\mathbb{E}[b_{k,2}(t)b_{k,2}^*(t)] = \sigma_k^2 \sigma_{\theta_k}^2 \quad (31)$$

$$\mathbb{E}[b_{k,3}(t)b_{k,3}^*(t)] = \sigma_k^2 \sigma_{\varphi_k}^2 \quad (32)$$

式(26)可以简写为

$$\mathbf{z}(t) \approx \mathbf{G}\mathbf{b}(t) + \mathbf{n}(t) \quad (33)$$

其中, \mathbf{G} 和 $\mathbf{b}(t)$ 表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= \left[\mathbf{a}(\bar{\theta}_1, \bar{\varphi}_1), \mathbf{a}(\bar{\theta}_2, \bar{\varphi}_2), \dots, \mathbf{a}(\bar{\theta}_K, \bar{\varphi}_K), \frac{\partial \mathbf{a}(\bar{\theta}_1, \bar{\varphi}_1)}{\partial \bar{\theta}_1}, \right. \\ &\frac{\partial \mathbf{a}(\bar{\theta}_2, \bar{\varphi}_2)}{\partial \bar{\theta}_2}, \dots, \frac{\partial \mathbf{a}(\bar{\theta}_K, \bar{\varphi}_K)}{\partial \bar{\theta}_K}, \\ &\left. \frac{\partial \mathbf{a}(\bar{\theta}_1, \bar{\varphi}_1)}{\partial \bar{\varphi}_1}, \frac{\partial \mathbf{a}(\bar{\theta}_2, \bar{\varphi}_2)}{\partial \bar{\varphi}_2}, \dots, \frac{\partial \mathbf{a}(\bar{\theta}_K, \bar{\varphi}_K)}{\partial \bar{\varphi}_K} \right] \end{aligned} \quad (34)$$

$$\mathbf{b}(t) = [b_{1,1}(t), b_{2,1}(t), \dots, b_{K,1}(t), b_{1,2}(t), b_{2,2}(t), \dots, b_{K,2}(t), b_{1,3}(t), b_{2,3}(t), \dots, b_{K,3}(t)]^T \quad (35)$$

因此, 式(7)可以近似为

$$\mathbf{R}_z \approx \mathbf{G}\mathbf{R}_b\mathbf{G}^H + \sigma_n^2 \mathbf{I}_M \quad (36)$$

其中, \mathbf{R}_b 为

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_b &= \mathbb{E}[\mathbf{b}(t)\mathbf{b}^H(t)] = \\ &\text{diag}\{\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_K^2, \sigma_1^2 \sigma_{\theta_1}^2, \sigma_2^2 \sigma_{\theta_2}^2, \dots, \\ &\sigma_K^2 \sigma_{\theta_K}^2, \sigma_1^2 \sigma_{\varphi_1}^2, \sigma_2^2 \sigma_{\varphi_2}^2, \dots, \sigma_K^2 \sigma_{\varphi_K}^2\} \end{aligned} \quad (37)$$

其中, diag 表示求对角矩阵。

归一化无量化协方差矩阵可以近似为

$$\bar{\mathbf{R}}_z \approx \mathbf{G}\bar{\mathbf{R}}_b\mathbf{G}^H + \frac{\sigma_n^2}{\sigma_n^2 + \sum_{k=1}^K (\sigma_k^2 + \sigma_k^2 \sigma_{\theta_k}^2 + \sigma_k^2 \sigma_{\varphi_k}^2)} \mathbf{I}_M \quad (38)$$

其中, $\bar{\mathbf{R}}_b$ 为

$$\bar{\mathbf{R}}_b = \frac{\mathbf{R}_b}{\sigma_n^2 + \sum_{k=1}^K (\sigma_k^2 + \sigma_k^2 \sigma_{\theta_k}^2 + \sigma_k^2 \sigma_{\varphi_k}^2)} \quad (39)$$

因此, 根据式(38)进行估计, $\bar{\mathbf{R}}_b$ 为

$$\bar{\mathbf{R}}_b = \hat{\mathbf{G}}^\dagger (\bar{\mathbf{R}}_z - \hat{\sigma}_n^2 \mathbf{I}_M) (\hat{\mathbf{G}}^H)^\dagger \quad (40)$$

其中, $\hat{\sigma}_n^2$ 为噪声功率估计值, 其由 $\bar{\mathbf{R}}_z$ 后 $M - 3K$ 个较小特征值的均值估计得到, $\hat{\mathbf{G}}$ 为将 DOA 估计值代入式(34)得到的 \mathbf{G} 的估计, $(\cdot)^\dagger$ 表示求矩阵伪逆。

给定 $\bar{\mathbf{R}}_b$, 根据式(37)和式(39), 方位向和俯仰向角度扩展可以由式(41)和式(42)得到

$$\hat{\sigma}_{\theta_k} = \sqrt{\frac{[\bar{\mathbf{R}}_b]_{k+K,k+K}}{[\bar{\mathbf{R}}_b]_{k,k}}} \quad (41)$$

$$\hat{\sigma}_{\varphi_k} = \sqrt{\frac{[\bar{\mathbf{R}}_b]_{k+2K,k+2K}}{[\bar{\mathbf{R}}_b]_{k,k}}} \quad (42)$$

其中, $k = 1, 2, \dots, K$ 。

因此, 本文所提单比特量化下 ID 源角度参数估计方法的具体步骤如下。

步骤 1 获取 ID 源单比特量化快拍数据, 根据式(16)构造单比特量化协方差矩阵。

步骤 2 根据式(9)构造归一化无量化协方差矩阵。

步骤 3 利用 CVX 工具箱对式(22)进行优化求解, 进而利用式(23)和式(24)估计方位向和俯仰向 DOA。

步骤 4 给定方位向和俯仰向 DOA 估计值, 利用式(40)估计 $\bar{\mathbf{R}}_b$ 。

步骤 5 给定 $\bar{\mathbf{R}}_b$, 利用式(41)和式(42)估计方位向和俯仰向角度扩展。

3 性能分析

3.1 计算复杂度分析

将本文方法记为 OB-NNM, 并将归一化无量化协方差矩阵重构方法与 ST^[30] 和 ESPRIT^[12] 方法结合, 分别记为 OB-ST 和 OB-ESPRIT。同时, 在无穷比特 (IB, infinite-bit) 量化下, 将本文方法与对比方法分别记为 IB-NNM、IB-ST 和 IB-ESPRIT。

在阵元数为 M 、信源数为 K 、快拍数为 Q 时, 单比特量化下, 对于 OB-NNM 方法, 方位和俯仰向的网格数为 N , 步骤 1 和步骤 2 的计算复杂度分别为 $\mathcal{O}(M^2Q)$ 和 $\mathcal{O}(M^2)$, 步骤 3 的计算复杂度为 $\mathcal{O}(D_1N^3)$, 其中, D_1 是 CVX 凸优化求解时的迭代次数, 通常为多项式级别, 步骤 4 和步骤 5 的计算复杂度为 $\mathcal{O}(M^2K + MK^2 + K^3)$ 。因此, OB-NNM

方法的总计算复杂度为 $\mathcal{O}(D_1N^3 + M^2Q + M^2 + M^2K + MK^2 + K^3)$, OB-ESPRIT 的计算复杂度为 $\mathcal{O}(M^3 + M^2Q + M^2 + MK^2 + K^3)$, OB-ST 的计算复杂度为 $\mathcal{O}(D_2M^3 + M^2Q + M^2)$ 。其中, D_2 为四维谱峰搜索的总次数, $D_1 > D_2 \gg 1$ 。与单比特量化相比, 无穷比特量化不需要进行步骤 2, 实际减小的计算量可以忽略不计, 则 IB-NNM 的计算复杂度为 $\mathcal{O}(D_1N^3 + M^2Q + M^2K + MK^2 + K^3)$, IB-ESPRIT 的计算复杂度为 $\mathcal{O}(M^3 + M^2Q + MK^2 + K^3)$, IB-ST 的计算复杂度为 $\mathcal{O}(D_2M^3 + M^2Q)$ 。

3.2 CRB 推导

3.2 节将推导单比特量化下 ID 源角度参数估计的 CRB。首先, 定义未知参数矢量为

$$\boldsymbol{\kappa} = [\boldsymbol{\tau}^T, \mathbf{v}^T]^T \quad (43)$$

其中, \mathbf{v} 、 $\boldsymbol{\tau}$ 、 $\bar{\boldsymbol{\theta}}$ 、 $\bar{\boldsymbol{\varphi}}$ 、 $\boldsymbol{\sigma}_\theta$ 和 $\boldsymbol{\sigma}_\varphi$ 分别为

$$\mathbf{v} = [\bar{\sigma}_1^2, \bar{\sigma}_2^2, \dots, \bar{\sigma}_K^2]^T \quad (44)$$

$$\boldsymbol{\tau} = [\bar{\boldsymbol{\theta}}^T, \bar{\boldsymbol{\varphi}}^T, \boldsymbol{\sigma}_\theta^T, \boldsymbol{\sigma}_\varphi^T]^T \quad (45)$$

$$\bar{\boldsymbol{\theta}} = [\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2, \dots, \bar{\theta}_K]^T \quad (46)$$

$$\bar{\boldsymbol{\varphi}} = [\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2, \dots, \bar{\varphi}_K]^T \quad (47)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_\theta = [\sigma_{\theta_1}, \sigma_{\theta_2}, \dots, \sigma_{\theta_K}]^T \quad (48)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_\varphi = [\sigma_{\varphi_1}, \sigma_{\varphi_2}, \dots, \sigma_{\varphi_K}]^T \quad (49)$$

Fisher 信息矩阵的第 i 行第 j 列元素可以表示为

$$[\mathbf{J}_{\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\kappa}}]_{ij} = Q \text{trace} \left(\mathbf{R}_z^{-1} \frac{\partial \mathbf{R}_z}{\partial \kappa_i} \mathbf{R}_z^{-1} \frac{\partial \mathbf{R}_z}{\partial \kappa_j} \right) \quad (50)$$

其中, κ_i 和 κ_j 为 $\boldsymbol{\kappa}$ 中第 i 个和第 j 个元素, $i = 1, 2, \dots, 5K$, $j = 1, 2, \dots, 5K$, Q 为快拍数, trace 表示矩阵求迹。

ID 源一般建模为高斯分布, 因此, 式(10)可以表示为^[12]

$$\bar{\mathbf{R}}_z = \sum_{k=1}^K \bar{\sigma}_k^2 \boldsymbol{\Xi}_k + \left(1 - \sum_{k=1}^K \bar{\sigma}_k^2 \right) \mathbf{I}_M \quad (51)$$

其中, $\boldsymbol{\Xi}_k$ 为

$$\boldsymbol{\Xi}_k = \left(\mathbf{a}(\bar{\theta}_k, \bar{\varphi}_k) \mathbf{a}^H(\bar{\theta}_k, \bar{\varphi}_k) \right) \odot \mathbf{D}_k = \mathbf{E}_k \odot \mathbf{D}_k \quad (52)$$

其中, \odot 表示矩阵点乘, \mathbf{E}_k 和 \mathbf{D}_k 的第 m 行第 n 列元素分别为

$$\begin{aligned} [\mathbf{E}_k]_{m,n} &= \exp(ju \sin(\bar{\varphi}_k))[(m_x - n_x) \cdot \\ &\cos(\bar{\theta}_k) + (m_y - n_y) \sin(\bar{\theta}_k)] = \\ &\exp(ju \sin(\bar{\varphi}_k))[\delta_x \cos(\bar{\theta}_k) + \delta_y \sin(\bar{\theta}_k)] \end{aligned} \quad (53)$$

$$\begin{aligned} [\mathbf{D}_k]_{m,n} &= \exp\left(-\left(\sigma_{\bar{\varphi}_k}^2 \cos^2(\bar{\varphi}_k) [\delta_x \cos(\bar{\theta}_k) + \delta_y \sin(\bar{\theta}_k)]^2 + \right. \right. \\ &\left. \left. \sigma_{\bar{\theta}_k}^2 \sin^2(\bar{\varphi}_k) [-\delta_x \sin(\bar{\theta}_k) + \delta_y \cos(\bar{\theta}_k)]^2\right) \frac{u^2}{2}\right) \end{aligned} \quad (54)$$

进一步求得

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial \mathbf{R}_z}{\partial \bar{\theta}_k} \right]_{m,n} &= \bar{\sigma}_k^2 [\bar{\mathbf{h}}]_{m,n} \left(\frac{\partial \Re([\mathbf{E}_k]_{m,n})}{\partial \bar{\theta}_k} [\mathbf{D}_k]_{m,n} + \Re([\mathbf{E}_k]_{m,n}) \frac{\partial [\mathbf{D}_k]_{m,n}}{\partial \bar{\theta}_k} \right) + \bar{\sigma}_k^2 [\tilde{\mathbf{h}}]_{m,n} \\ &\left(\frac{\partial \Im([\mathbf{E}_k]_{m,n})}{\partial \bar{\theta}_k} [\mathbf{D}_k]_{m,n} + \Im([\mathbf{E}_k]_{m,n}) \frac{\partial [\mathbf{D}_k]_{m,n}}{\partial \bar{\theta}_k} \right) \end{aligned} \quad (56)$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial \mathbf{R}_z}{\partial \bar{\varphi}_k} \right]_{m,n} &= \bar{\sigma}_k^2 [\bar{\mathbf{h}}]_{m,n} \left(\frac{\partial \Re([\mathbf{E}_k]_{m,n})}{\partial \bar{\varphi}_k} [\mathbf{D}_k]_{m,n} + \Re([\mathbf{E}_k]_{m,n}) \frac{\partial [\mathbf{D}_k]_{m,n}}{\partial \bar{\varphi}_k} \right) + \\ &\bar{\sigma}_k^2 [\tilde{\mathbf{h}}]_{m,n} \left(\frac{\partial \Im([\mathbf{E}_k]_{m,n})}{\partial \bar{\varphi}_k} [\mathbf{D}_k]_{m,n} + \Im([\mathbf{E}_k]_{m,n}) \frac{\partial [\mathbf{D}_k]_{m,n}}{\partial \bar{\varphi}_k} \right) \end{aligned} \quad (57)$$

$$\left[\frac{\partial \mathbf{R}_z}{\partial \sigma_{\theta_k}} \right]_{m,n} = \bar{\sigma}_k^2 [\bar{\mathbf{h}}]_{m,n} \Re([\mathbf{E}_k]_{m,n}) \frac{\partial [\mathbf{D}_k]_{m,n}}{\partial \sigma_{\theta_k}} + \bar{\sigma}_k^2 [\tilde{\mathbf{h}}]_{m,n} \Im([\mathbf{E}_k]_{m,n}) \frac{\partial [\mathbf{D}_k]_{m,n}}{\partial \sigma_{\theta_k}} \quad (58)$$

$$\left[\frac{\partial \mathbf{R}_z}{\partial \sigma_{\varphi_k}} \right]_{m,n} = \bar{\sigma}_k^2 [\bar{\mathbf{h}}]_{m,n} \Re([\mathbf{E}_k]_{m,n}) \frac{\partial [\mathbf{D}_k]_{m,n}}{\partial \sigma_{\varphi_k}} + \bar{\sigma}_k^2 [\tilde{\mathbf{h}}]_{m,n} \Im([\mathbf{E}_k]_{m,n}) \frac{\partial [\mathbf{D}_k]_{m,n}}{\partial \sigma_{\varphi_k}} \quad (59)$$

$$\left[\frac{\partial \mathbf{R}_z}{\partial \bar{\sigma}_k^2} \right]_{m,n} = [\bar{\mathbf{h}}]_{m,n} \left(\Re([\mathbf{E}_k]_{m,n}) [\mathbf{D}_k]_{m,n} - \Delta_{m,n} \right) + [\tilde{\mathbf{h}}]_{m,n} \left(\Im([\mathbf{E}_k]_{m,n}) [\mathbf{D}_k]_{m,n} \right) \quad (60)$$

其中, $[\bar{\mathbf{h}}]_{m,n}$ 和 $[\tilde{\mathbf{h}}]_{m,n}$ 分别为

$$[\bar{\mathbf{h}}]_{m,n} = \frac{2}{\pi \sqrt{1 - \left(\sum_{k=1}^K \bar{\sigma}_k^2 \Re([\mathbf{E}_k]_{m,n}) [\mathbf{D}_k]_{m,n} + \left(1 - \sum_{k=1}^K \bar{\sigma}_k^2 \right) \Delta_{m,n} \right)^2}} \quad (61)$$

$$[\tilde{\mathbf{h}}]_{m,n} = \frac{2}{\pi \sqrt{1 - \left(\sum_{k=1}^K \bar{\sigma}_k^2 \Im([\mathbf{E}_k]_{m,n}) [\mathbf{D}_k]_{m,n} \right)^2}} \quad (62)$$

$$\frac{\partial \Re([\mathbf{E}_k]_{m,n})}{\partial \bar{\theta}_k} = -u \sin(\bar{\varphi}_k) \Im([\mathbf{E}_k]_{m,n}) [-\delta_x \sin(\bar{\theta}_k) + \delta_y \cos(\bar{\theta}_k)] \quad (63)$$

其中, $m = (m_y - 1)M_x + m_x$, $n = (n_y - 1)M_x + n_x$, $\delta_x = m_x - n_x$, $\delta_y = m_y - n_y$, $m_x = 1, 2, \dots, M_x$, $n_x = 1, 2, \dots, M_x$, $m_y = 1, 2, \dots, M_y$, $n_y = 1, 2, \dots, M_y$ 。

根据式(9)和式(51), 可以得到

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_z &= \frac{2}{\pi} \arcsine(\bar{\mathbf{R}}_z) = \\ &\frac{2}{\pi} \arcsine\left(\sum_{k=1}^K \bar{\sigma}_k^2 \mathbf{E}_k + \left(1 - \sum_{k=1}^K \bar{\sigma}_k^2\right) \mathbf{I}_M\right) \end{aligned} \quad (55)$$

$$\frac{\partial \Im\left([\mathbf{E}_k]_{m,n}\right)}{\partial \bar{\theta}_k} = u \sin(\bar{\varphi}_k) \Re\left([\mathbf{E}_k]_{m,n}\right) \cdot \left[-\delta_x \sin(\bar{\theta}_k) + \delta_y \cos(\bar{\theta}_k)\right] \quad (64)$$

$$\frac{\partial \Re\left([\mathbf{E}_k]_{m,n}\right)}{\partial \bar{\varphi}_k} = -u \cos(\bar{\varphi}_k) \Im\left([\mathbf{E}_k]_{m,n}\right) \cdot \left[\delta_x \cos(\bar{\theta}_k) + \delta_y \sin(\bar{\theta}_k)\right] \quad (65)$$

$$\frac{\partial \Im\left([\mathbf{E}_k]_{m,n}\right)}{\partial \bar{\varphi}_k} = u \cos(\bar{\varphi}_k) \Re\left([\mathbf{E}_k]_{m,n}\right) \cdot \left[\delta_x \cos(\bar{\theta}_k) + \delta_y \sin(\bar{\theta}_k)\right] \quad (66)$$

$$\frac{\partial [\mathbf{D}_k]_{m,n}}{\partial \bar{\theta}_k} = -\frac{u^2}{2} [\mathbf{D}_k]_{m,n} \left(\sigma_{\bar{\theta}_k}^2 \sin^2(\bar{\varphi}_k) - \sigma_{\bar{\varphi}_k}^2 \cos^2(\bar{\varphi}_k)\right) \cdot \left((\delta_x^2 - \delta_y^2) \sin(2\bar{\theta}_k) - 2\delta_x \delta_y \cos(2\bar{\theta}_k)\right) \quad (67)$$

$$\frac{\partial [\mathbf{D}_k]_{m,n}}{\partial \bar{\varphi}_k} = -\frac{u^2}{2} [\mathbf{D}_k]_{m,n} \sin(2\bar{\varphi}_k) \cdot \left(-\sigma_{\bar{\theta}_k}^2 \left[\delta_x \cos(\bar{\theta}_k) + \delta_y \sin(\bar{\theta}_k)\right]^2 + \sigma_{\bar{\varphi}_k}^2 \left[-\delta_x \sin(\bar{\theta}_k) + \delta_y \cos(\bar{\theta}_k)\right]^2\right) \quad (68)$$

$$\frac{\partial [\mathbf{D}_k]_{m,n}}{\partial \sigma_{\bar{\theta}_k}} = -u^2 \sigma_{\bar{\theta}_k} [\mathbf{D}_k]_{m,n} \sin^2(\bar{\varphi}_k) \cdot \left[-\delta_x \sin(\bar{\theta}_k) + \delta_y \cos(\bar{\theta}_k)\right]^2 \quad (69)$$

$$\frac{\partial [\mathbf{D}_k]_{m,n}}{\partial \sigma_{\bar{\varphi}_k}} = -u^2 \sigma_{\bar{\varphi}_k} [\mathbf{D}_k]_{m,n} \cos^2(\bar{\varphi}_k) \cdot \left[\delta_x \cos(\bar{\theta}_k) + \delta_y \sin(\bar{\theta}_k)\right]^2 \quad (70)$$

$$\Delta_{m,n} = \begin{cases} 1, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases} \quad (71)$$

根据式(56)~式(71)，可以得到

$$\mathbf{J}_{\kappa,\kappa} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{\tau,\tau} & \mathbf{J}_{\tau,v} \\ \mathbf{J}_{\tau,v}^T & \mathbf{J}_{v,v} \end{bmatrix} \quad (72)$$

最后，利用分块矩阵求逆定理可以得到 $\boldsymbol{\tau}$ 的 CRB 为

$$\text{CRB}(\boldsymbol{\tau}) = \left(\mathbf{J}_{\tau,\tau} - \mathbf{J}_{\tau,v} \mathbf{J}_{v,v}^{-1} \mathbf{J}_{\tau,v}^T\right)^{-1} \quad (73)$$

4 仿真分析

为了评估本文所提 ID 源角度参数估计方法的性能，定义均方根误差 (RMSE, root mean square error) 为

$$\text{RMSE}_{\theta,\varphi} = \sqrt{\sum_{k=1}^K \sum_{g=1}^{M_c} \frac{(\bar{\theta}_k - \hat{\theta}_{k,g})^2 + (\bar{\varphi}_k - \hat{\varphi}_{k,g})^2}{2KM_c}} \quad (74)$$

$$\text{RMSE}_{\sigma_{\theta},\sigma_{\varphi}} = \sqrt{\sum_{k=1}^K \sum_{g=1}^{M_c} \frac{(\sigma_{\theta_k} - \hat{\sigma}_{\theta_{k,g}})^2 + (\sigma_{\varphi_k} - \hat{\sigma}_{\varphi_{k,g}})^2}{2KM_c}} \quad (75)$$

其中， $\hat{\theta}_{k,g}$ 和 $\hat{\varphi}_{k,g}$ 分别为 $\bar{\theta}_k$ 和 $\bar{\varphi}_k$ 第 g 次仿真的估计值， $\hat{\sigma}_{\theta_{k,g}}$ 和 $\hat{\sigma}_{\varphi_{k,g}}$ 分别为 σ_{θ_k} 和 σ_{φ_k} 第 g 次仿真的估计值， M_c 为 Monte-Carlo 仿真次数。

假设 2 个窄带 ID 源入射到相邻阵元间距为半波长的 M 元均匀矩阵上，每个阵元都与一个单比特 ADC 相连，对收到的信号进行单比特量化处理。如果不做特殊说明， $M = 36$ 。每个 ID 源的多径数均为 $\{L_k\}_{k=1}^K = 50$ 。2 个 ID 源的空间信息分别为 $\{\bar{\theta}_1, \bar{\varphi}_1, \sigma_{\theta_1}, \sigma_{\varphi_1}, \sigma_{\gamma_1}\} = \{39.34^\circ, 28.13^\circ, 3^\circ, 3^\circ, 1\}$ 和 $\{\bar{\theta}_2, \bar{\varphi}_2, \sigma_{\theta_2}, \sigma_{\varphi_2}, \sigma_{\gamma_2}\} = \{56.45^\circ, 44.21^\circ, 3^\circ, 3^\circ, 1\}$ 。网格间距为 $\Delta_\theta = \Delta_\varphi = 2^\circ$ ，正则化参数 $\mu = 0.25$ 。将本文方法 OB-NNM 与 OB-ST、OB-ESPRIT、IB-NNM、IB-ST、IB-ESPRIT、OB-CRB 以及无穷比特量化下的 IB-CRB^[12] 进行对比，OB-ST 和 IB-ST 的四维谱峰搜索的扫描间隔均设置为 2° ，Monte-Carlo 仿真次数为 100。

图 1 给出了信噪比为 0 dB 时不同方法随快拍数变化的 DOA 估计均方根误差曲线，图 2 给出了信噪比为 0 dB 时不同方法随快拍数变化的角度扩展估计均方根误差曲线。从图 1 和图 2 可以看出，随着快拍数的增加，各方法的角度参数估计精度逐渐提升，均方根误差不断减小。本文方法在 DOA 估计和角度扩展估计方面都展现出了明显的优势。与其他单比特方法相比，本文方法不仅估计精度更高、均方根误差更小，而且在快拍数大于 300 时，其估计精度甚至优于 IB-ST 方法。这充分验证了本文方法在快拍数较小时依然能够保持优异的估计性能，展现了其在实际应用中的潜在优势。

图 3 给出了快拍数为 100 时不同方法随信噪比变化的 DOA 估计均方根误差曲线，图 4 给出了快拍数为 100 时不同方法随信噪比变化的角度扩展估计均方根误差曲线。从图 3 和图 4 可以看出，随着信噪比的增加，各方法的均方根误差均逐渐减小。本文方法表现优异，不仅在各信噪比条件下均优于其他单比特方法，而且在信噪比大于 0 dB 时，其估计性能与 IB-ST 方法相当，上述结果充分验证了本文方法在低信噪比环境下的鲁棒性。

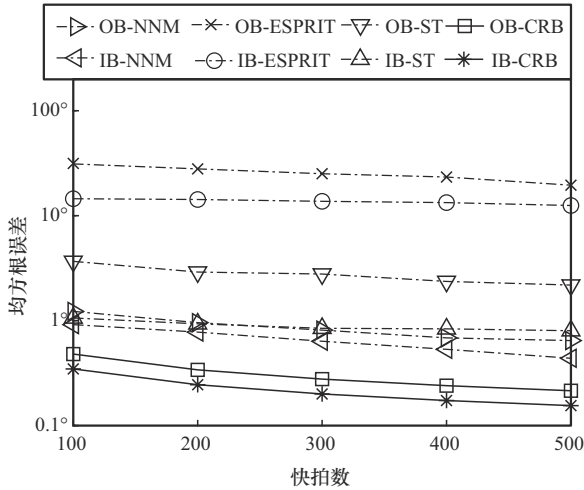


图 1 信噪比为 0 dB 时不同方法随快拍数变化的 DOA 估计均方根误差曲线

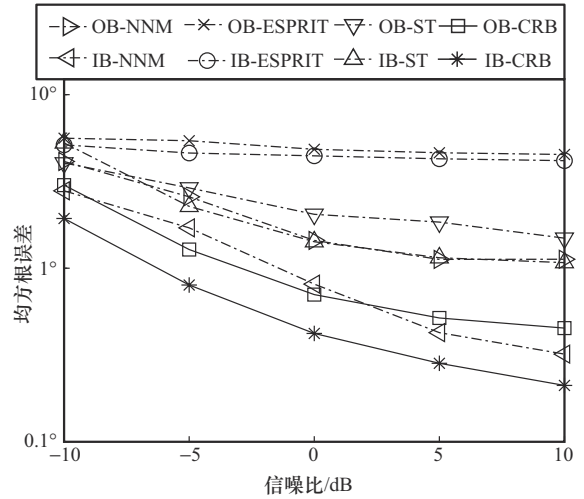


图 4 快拍数为 100 时不同方法随信噪比变化的角度扩展估计均方根误差曲线

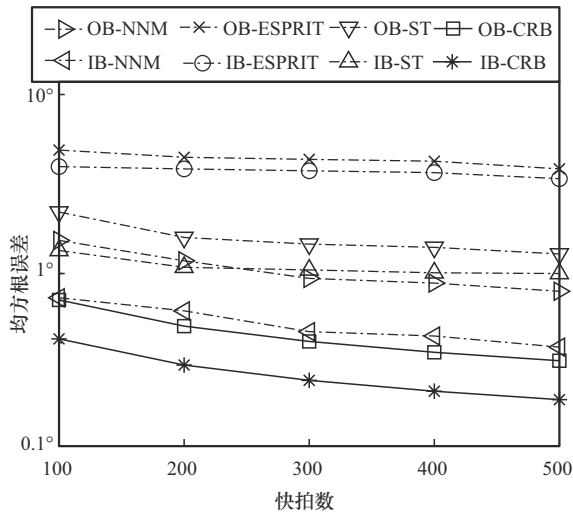


图 2 信噪比为 0 dB 时不同方法随快拍数变化的角度扩展估计均方根误差曲线

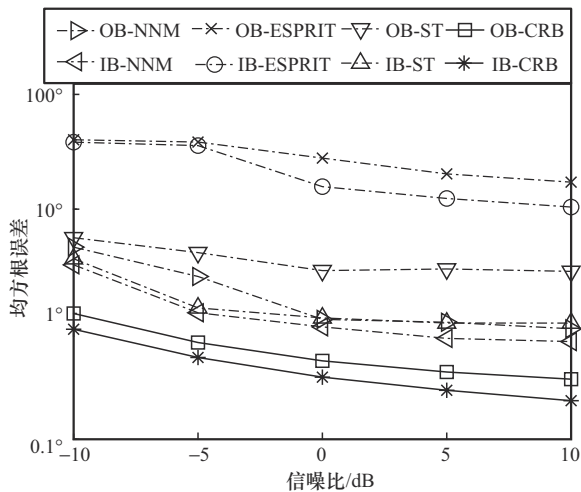


图 3 快拍数为 100 时不同方法随信噪比变化的 DOA 估计均方根误差曲线

图 5 给出了快拍数为 100 和信噪比为 0 dB 时不同方法随阵元数变化的 DOA 估计均方根误差曲线, 图 6 给出了快拍数为 100 和信噪比为 0 dB 时不同方法随阵元数变化的角度扩展估计均方根误差曲线。从图 5 和图 6 可以看出, 本文方法在大规模天线阵列的场景下依然展现出优异的角度参数估计性能。上述结果充分证明了本文方法在大规模 MIMO 系统中的巨大潜力和应用价值。

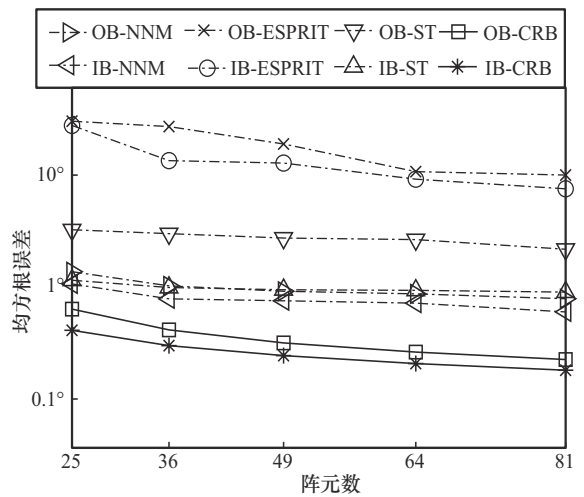


图 5 快拍数为 100 和信噪比为 0 dB 时不同方法随阵元数变化的 DOA 估计均方根误差曲线

图 7 给出了快拍数为 100 和信噪比为 0 dB 时不同方法随阵元数变化的计算时间曲线。从图 7 可以看出, OB-ESPRIT 和 IB-ESPRIT 方法的计算时间最短, 但性能较差。在多径密集场景下, ID 源由于考虑了空间分布效应, 待估参数包括二维 DOA

和角度扩展,因此,OB-ST和IB-ST方法需要进行四维谱峰搜索,导致计算时间随着阵元数的增加而显著增长,这不利于其在大规模MIMO系统中的工程应用。相比之下,OB-NNM和IB-NNM方法通过解耦二维DOA和角度扩展,有效降低了计算复杂度,计算时间介于OB-ESPRIT、IB-ESPRIT与OB-ST、IB-ST方法之间。同时,综合图1~图6的结果可以看出,本文方法的估计性能最优,在估计精度和计算效率之间达到良好的平衡。

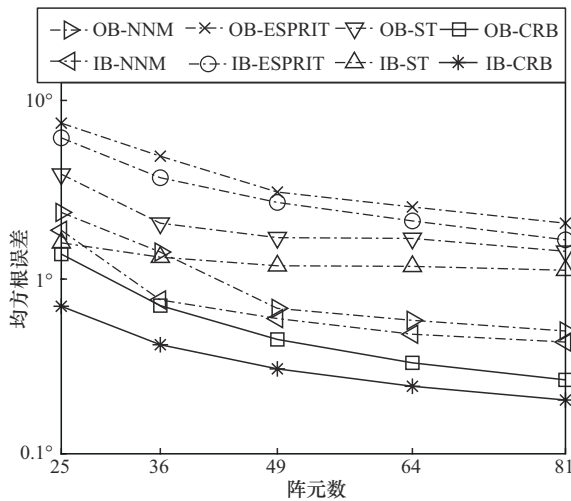


图6 快拍数为100和信噪比为0 dB时不同方法随阵元数变化的角度扩展估计均方根误差曲线

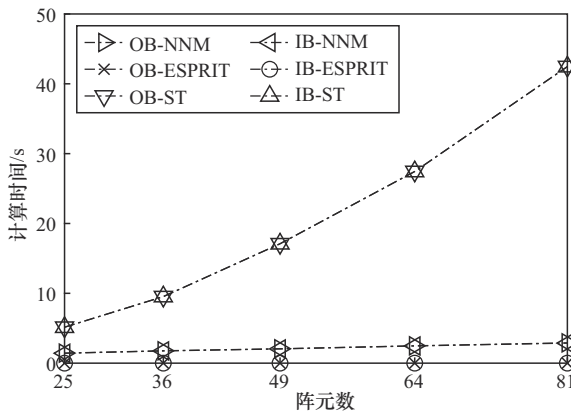


图7 快拍数为100和信噪比为0 dB时不同方法随阵元数变化的计算时间曲线

经过图1~图7的仿真实验充分验证,相较于已有的ID源角度参数估计方法,本文方法OB-NNM展现出优异的性能。该方法将ID源的角度参数问题转化为低秩矩阵重构问题,从而实现DOA的高精度估计。通过这一转化,DOA和角度扩展的解耦处理得以实现,有效提升了估计精度。进一步

地,本文利用一阶泰勒近似模型获取无噪信号的协方差矩阵,从而推导出角度扩展估计的闭式解。这种方法避免了复杂的多维谱峰搜索,显著缩短了计算时间,有助于推进其在大规模MIMO系统中的应用进程。

5 结束语

本文针对多径密集场景,提出一种适用于单比特大规模MIMO系统的ID源角度参数估计方法,旨在克服传统方法在成本、功耗以及应用范围上的局限性。该方法通过利用反正弦定律恢复归一化无量化协方差矩阵,并建立NNM模型以恢复低秩空间谱矩阵,实现了中心方位角和俯仰角的有效估计。同时,采用一阶泰勒展开重构无噪信号协方差矩阵,从而实现对角度扩展的有效估计,并推导了单比特量化下ID源角度参数估计的CRB。仿真结果表明,本文方法在估计精度和计算效率方面取得了明显的优势,不仅为单比特大规模MIMO系统的工程应用提供了有力支持,还为相关领域的进一步发展和应用奠定了基础。

参考文献:

- [1] WALDEN R H. Analog-to-digital converter survey and analysis[J]. IEEE Journal on Selected Areas in Communications, 1999, 17(4): 539-550.
- [2] ZHENG Z, GUO N, WANG W Q. Angle estimation for bistatic MIMO radar using one-bit sampling via atomic norm minimization[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2022, 58(6): 5815-5822.
- [3] 周锋,张宝胜,张文博. 基于水声扩频信号的空时分簇DoA估计算法[J]. 通信学报, 2022, 43(8): 100-108.
ZHOU F, ZHANG B S, ZHANG W B. Space-time division cluster DoA estimation algorithm based on UWA spread spectrum signal[J]. Journal on Communications, 2022, 43(8): 100-108.
- [4] 徐明,唐倩. 基于原子范数的波达方向与时延联合估计方法[J]. 通信学报, 2024, 45(10): 153-162.
XU M, TANG Q. Joint DOA-delay estimation approach based on atomic norm[J]. Journal on Communications, 2024, 45(10): 153-162.
- [5] 夏楠,马昕昕,王思琦. 强干扰下基于三阶互累积量的FMCW雷达信号DOA估计算法[J]. 电子学报, 2024, 52(2): 510-517.
XIA N, MA X X, WANG S Q. FMCW radar signal DOA estimation method based on the third-order cross cumulant under high interference[J]. Acta Electronica Sinica, 2024, 52(2): 510-517.
- [6] AHMED T, ZHANG X F, HASSAN W U. A higher-order propagator method for 2D-DOA estimation in massive MIMO systems[J]. IEEE Communications Letters, 2020, 24(3): 543-547.

- [7] LIU Y S, YAN Y W, YOU L, et al. Spatial covariance matrix reconstruction for DOA estimation in hybrid massive MIMO systems with multiple radio frequency chains[J]. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 2021, 70(11): 12185-12190.
- [8] HU D, ZHANG Y H, HE L H, et al. Low-complexity deep-learning-based DOA estimation for hybrid massive MIMO systems with uniform circular arrays[J]. *IEEE Wireless Communications Letters*, 2020, 9(1): 83-86.
- [9] WEN F Q, GUI G, GACANIN H, et al. Compressive sampling framework for 2D-DOA and polarization estimation in mmWave polarized massive MIMO systems[J]. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 2023, 22(5): 3071-3083.
- [10] WAN L T, HAN G J, JIANG J F, et al. DOA estimation for coherently distributed sources considering circular and noncircular signals in massive MIMO systems[J]. *IEEE Systems Journal*, 2017, 11(1): 41-49.
- [11] LIU Y P, GAO H Y, DU Y N, et al. Low-complexity DOA estimation for coherently distributed sources with gain-phase errors in massive MIMO systems[J]. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 2024, 73(6): 7939-7948.
- [12] HU A Z, LV T J, GAO H, et al. An ESPRIT-based approach for 2-D localization of incoherently distributed sources in massive MIMO systems[J]. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 2014, 8(5): 996-1011.
- [13] ZHENG Z, WANG W Q, MENG H P, et al. Efficient beamspace-based algorithm for two-dimensional DOA estimation of incoherently distributed sources in massive MIMO systems[J]. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 2018, 67(12): 11776-11789.
- [14] HUANG X D, BI S Z, LIAO B. Direction-of-arrival estimation based on quantized matrix recovery[J]. *IEEE Communications Letters*, 2020, 24(2): 349-353.
- [15] BAR-SHALOM O, WEISS A J. DOA estimation using one-bit quantized measurements[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2002, 38(3): 868-884.
- [16] HUANG X, LIAO B. One-bit MUSIC[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2019, 26(7): 961-965.
- [17] MENG X M, ZHU J. A generalized sparse Bayesian learning algorithm for 1-bit DOA estimation[J]. *IEEE Communications Letters*, 2018, 22(7): 1414-1417.
- [18] WEI Z Y, WANG W, DONG F W, et al. Gridless one-bit direction-of-arrival estimation via atomic norm denoising[J]. *IEEE Communications Letters*, 2020, 24(10): 2177-2181.
- [19] TANG W G, JIANG H, ZHANG Q. One-bit gridless DOA estimation with multiple measurements exploiting accelerated proximal gradient algorithm[J]. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, 2022, 41(2): 1100-1114.
- [20] FENG L F, HUANG L, LI Q, et al. An off-grid iterative reweighted approach to one-bit direction of arrival estimation[J]. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 2023, 72(6): 8134-8139.
- [21] CHEN M Y, LI Q, LI X P, et al. One-bit DoA estimation for deterministic signals based on $l_{2,1}$ -norm minimization[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2024, 60(2): 2438-2444.
- [22] ZHANG N, ZHU J, XU Z W. Gridless multisnapshot variational line spectral estimation from coarsely quantized samples[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2023, 59(3): 2979-2993.
- [23] CHEN M Y, LI Q, HUANG L, et al. One-bit Cramér-Rao bound of direction of arrival estimation for deterministic signals[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 2024, 71(2): 957-961.
- [24] VALAEE S, CHAMPAGNE B, KABAL P. Parametric localization of distributed sources[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1995, 43(9): 2144-2153.
- [25] 高洪元, 刘亚鹏, 杜亚男, 等. 一种冲击噪声下相干分布源多峰DOA估计方法[J]. *电子学报*, 2023, 51(9): 2330-2340.
- GAO H Y, LIU Y P, DU Y N, et al. A multimodal DOA estimation method of coherently distributed sources in impulse noise[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2023, 51(9): 2330-2340.
- [26] 蔡睿妍, 杨力, 钱杨. 脉冲噪声下基于相关熵的相干分布源DOA估计新方法[J]. *电子与信息学报*, 2020, 42(11): 2600-2606.
- CAI R Y, YANG L, QIAN Y. A novel DOA estimation method for coherently distributed sources based on correntropy in the impulsive noise[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2020, 42(11): 2600-2606.
- [27] LIU Y P, GAO H Y, DU Y N, et al. DOA estimation for mixed circular and noncircular coherently distributed sources under impulsive noise[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2024, 60(5): 6622-6637.
- [28] TIAN Q, CAI R Y. A low-complexity DOA estimation algorithm for distributed source localization[J]. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 2023, 72: 8000504.
- [29] MENG Y, STOICA P, WONG K M. Estimation of the directions of arrival of spatially dispersed signals in array processing[J]. *IEEE Proceedings-Radar, Sonar and Navigation*, 1996, 143(1): 1-9.
- [30] ZOUBIR A, WANG Y D, CHARGÉ P. Efficient subspace-based estimator for localization of multiple incoherently distributed sources[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2008, 56(2): 532-542.
- [31] SHAHBAZPANAHI S, VALAEE S, GERSHMAN A B. A covariance fitting approach to parametric localization of multiple incoherently distributed sources[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2004, 52(3): 592-600.
- [32] ZHUANG J, XIONG H, WANG W, et al. Application of manifold separation to parametric localization for incoherently distributed sources[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2018, 66(11): 2849-2860.
- [33] LIU F L, TANG K, CHEN X D, et al. MST-ID algorithm for angular parameter estimation of incoherently distributed sources[J]. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, 2022, 41(7): 3798-3810.
- [34] YANG L L, LI J, CHEN F J, et al. Joint angular-frequency distribution estimation via spatial-temporal sparse sampling and low-rank matrix recovery[J]. *Signal Processing*, 2023, 206: 108918.
- [35] TIAN Y, LIU W, XU H, et al. 2-D DOA estimation of incoherently distributed sources considering gain-phase perturbations in massive

MIMO systems[J]. IEEE Transactions on Wireless Communications, 2022, 21(2): 1143-1155.

[36] LIU Y P, GAO H Y, DU Y N, et al. Noncircularity-based DOA estimation for incoherently distributed sources with gain-phase uncertainties[J]. IEEE Sensors Journal, 2024, 24(16): 26022-26033.

[37] LIU Y P, GAO H Y, GRECO M S, et al. Robust DOA estimation of incoherently distributed sources considering mixed circular and noncircular signals in impulsive noise[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2024 (31): 1900-1904.

[38] VAN V J H, MIDDLETON D. The spectrum of clipped noise[J]. Proceedings of the IEEE, 1966, 54(1): 2-19.

[39] LEVER J, KRZYWINSKI M, ALTMAN N. Principal component analysis[J]. Nature Methods, 2017, 14: 641-642.



高洪元 (1977-), 男, 黑龙江木兰人, 博士, 哈尔滨工程大学副教授、博士生导师, 主要研究方向为信号处理、无线通信与网络、人工智能理论及其应用。



张志伟 (1996-), 男, 安徽淮北人, 哈尔滨工程大学博士生, 主要研究方向为智能计算、盲源分离和阵列信号处理。

[作者简介]



刘亚鹏 (1999-), 男, 河北邯郸人, 哈尔滨工程大学博士生, 主要研究方向为阵列信号处理、最优化理论与应用。



马静雅 (1993-), 女, 黑龙江哈尔滨人, 哈尔滨工程大学博士生, 主要研究方向为异构网络资源分配、智能计算、D2D通信。